Unidad II

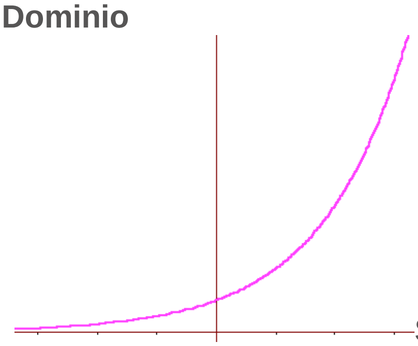
Funciones

2.1 Concepto de variable, función, dominio, condominio y recorrido de una función.

Función

En matemática, una función (f) es una relación entre un conjunto dado X (llamado dominio) y otro conjunto de elementos Y (llamado codominio) de forma que a cada elemento x del dominio le corresponde un único elemento f(x) del codominio (los que forman el recorrido, también llamado rango o ámbito). En lenguaje cotidiano o más simple, diremos que las funciones matemáticas equivalen al proceso lógico común que se expresa como “depende de”. Las funciones matemáticas pueden referirse a situaciones cotidianas, tales como: el costo de una llamada telefónica que depende de su duración, o el costo de enviar una encomienda que depende de su peso.

Dominio



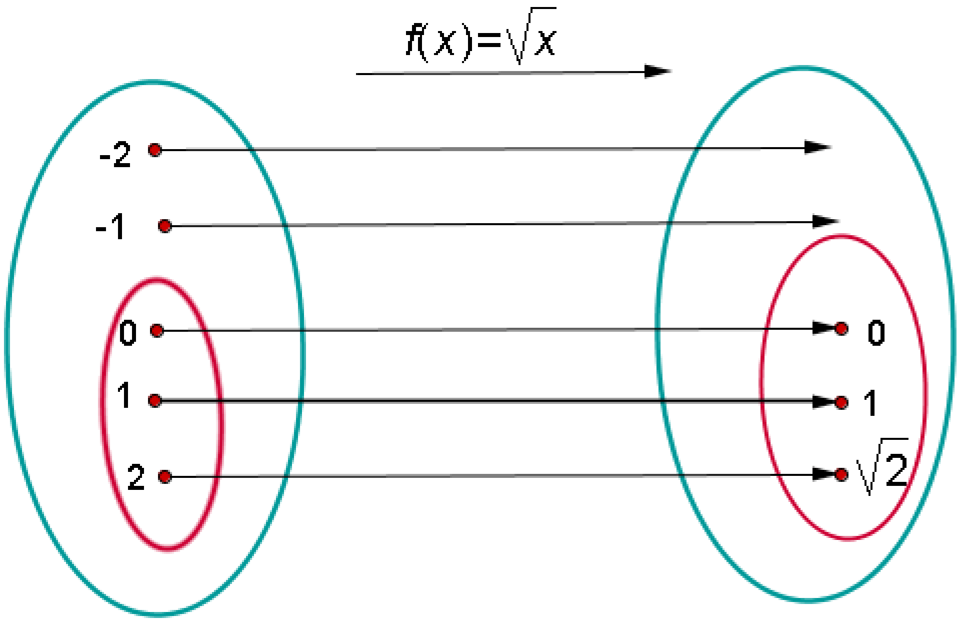
Se llama dominio de definición de una función f, y se designa por Dom f, al conjunto de valores de x para los cuales existe la función, es decir, para los cuales podemos calcular y = f(x). Se dice que el dominio de una función son todos los valores que puede tomar el conjunto del dominio y que encuentra correspondencia en el conjunto llamado codominio. El dominio es el intervalo de valores que están sobre el eje de las X y que nos generan una asociación en el eje de las Y .

El otro conjunto que interviene en la definición es el conjunto llamado codominio o rango de la función, tambien llamado imagen o recorrido, este conjunto son los valores que puede tomar la función; son todos los valores de las Y.

Una función consiste , entonces, en dos conjuntos, dominio y rango, y una regla que asigna a cada miembro del dominio exactamente un miembro del rango. A cada miembro del rango debe serle asignado por lo menos un miembro del dominio. Si la relación entre dos variables x y y es una en la que para cada valor de y hay exactamente un valor de x, se dice que y es una función de x.

Rango

Se denomina rango o recorrido de una función al conjunto de los valores reales que toma la variable y o f(x).



Conjunto inicial Conjunto final

Dominio Rango o recorrido o conjunto imagen

Cálculo del rango o recorrido

Para **calcular el rango** de una función tenemos que hallar el **dominio** de su **función inversa**.

$$f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$$

$$y=\frac{2x+3}{x-1} \qquad y(x-1)=2x+3$$

$$xy-y=2x+3 \qquad xy-2x=y+3$$

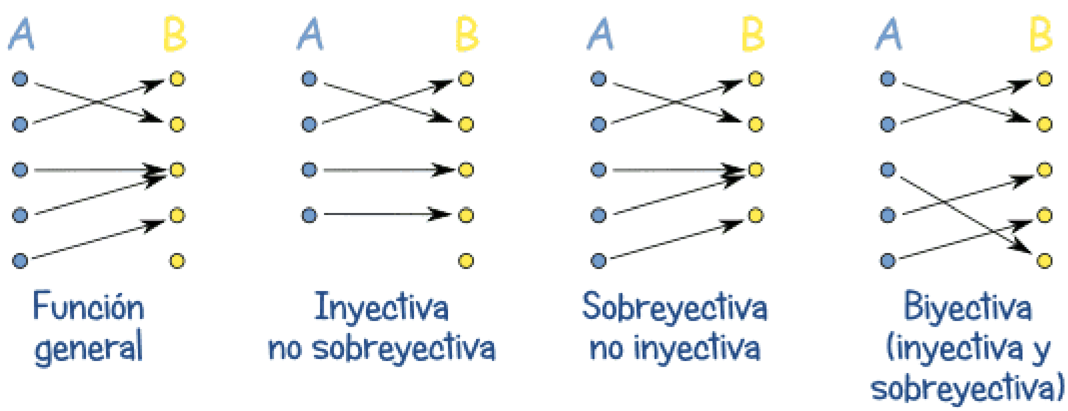
$$x(y-2) = y+3 \qquad x = \frac{y+3}{y-2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{x-2}$$

R = $\mathbb{R}$ − {2}

2.2 Función inyectiva, suprayectiva y biyectiva

"Inyectivo, sobreyectivo y biyectivo" te dan información sobre el comportamiento de una función.
Puedes entender una función como una manera de conectar elementos de un conjunto "A" a los de otro conjunto "B":



"Injectivo" significa que cada elemento de "B" tiene como mucho uno de "A" al que corresponde (pero esto no nos dice que todos los elementos de "B" tengan alguno en "A").

"Sobreyectivo" significa que cada elemento de "B" tiene por lo menos uno de "A" (a lo mejor más de uno).

"Biyectivo" significa inyectivo y sobreyectivo a la vez. Así que hay una correspondencia perfecta "uno a uno" entre los elementos de los dos conjuntos.

Definiciones formales
Inyectivo

Una función f es inyectiva si, cuando f(x) = f(y), x = y.

Ejemplo: f(x) = x2 del conjunto de los números naturales a es una función inyectiva.

(Pero f(x) = x2 no es inyectiva cuando es desde el conjunto de enteros (esto incluye números negativos) porque tienes por ejemplo

f(2) = 4 y

f(-2) = 4)

Sobreyectivo (o también "epiyectivo")

Una función f (de un conjunto A a otro B) es sobreyectiva si para cada y en B, existe por lo menos un x en A que cumple f(x) = y, en otras palabras f es sobreyectiva si y sólo si f(A) = B.

Así que cada elemento de la imagen corresponde con un elemento del dominio por lo menos.

Ejemplo: la función f(x) = 2x del conjunto de los números naturales al de los números pares no negativos es sobreyectiva.

Sin embargo, f(x) = 2x del conjunto de los números naturales a no es sobreyectiva, porque, por ejemplo, ningún elemento de N va al 3 por esta función.

Biyectiva

Una función f (del conjunto A al B) es biyectiva si, para cada y en B, hay exactamente un x en A que cumple que f(x) = y

Alternativamente, f es biyectiva si es a la vez inyectiva y sobreyectiva.

Ejemplo: La función f(x) = x2 del conjunto de números reales positivos al mismo conjunto es inyectiva y sobreyectiva. Por lo tanto es biyectiva.

(Pero no desde el conjunto de todos los números reales porque podrías tener por ejemplo

f(2)=4 y

f(-2)=4)

2.3 Función real de variable real y su representación gráfica.

Completa la tabla de las siguientes funciones y grafica en el plano cartesiano

$$y = 4x - 2$$

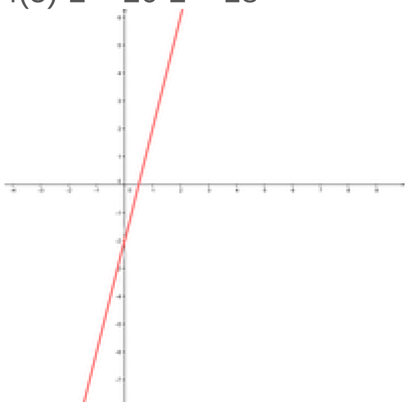
D(-∞,∞)

R(-∞,∞)

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

y	-2	2	6	10	14	18

4(0)-2 = 0-2 =-2
4(1)-2 = 4-2 = 2
4(2)-2 = 8-2 = 6
4(3)-2 = 12-2 = 10
4(4)-2 = 16-2 = 14
4(5)-2 = 20-2 = 18



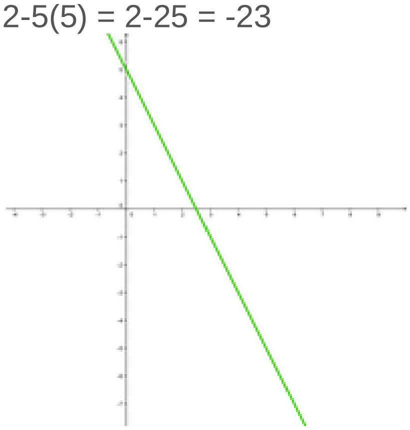
$y = 5 - 2x$

D(-∞,∞)

R(-∞,∞)

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
y	2	-3	-8	-13	-18	-23

2-5(0) = 2-0 =2
2-5(1) = 2-5 = -3
2-5(2) = 2-10 = -8
2-5(3) = 2-15 = -13
2-5(4) = 2-20 = -18
2-5(5) = 2-25 = -23



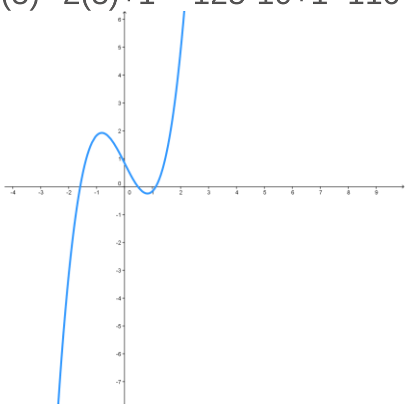
$y = x^3 - 2x + 1$

D(-∞,∞)

R(-∞,∞)

x	0	1	2	3	4	5
y	1	2	5	22	57	116

$(0)^3$-2(0)+1 = 0-0+1 =1
$(1)^3$-2(1)+1 = 1-2+1 =2
$(2)^3$-2(2)+1 = 8-4+1 =5
$(3)^3$-2(3)+1 = 27-6+1 =22
$(4)^3$-2(4)+1 = 64-8+1 =57
$(5)^3$-2(5)+1 = 125-10+1=116

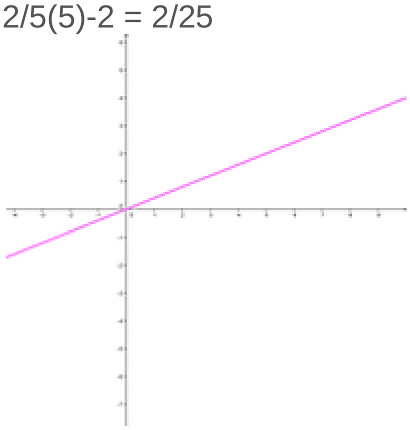


$$y = \frac{2}{5x}$$

D=R-{5}

x	0	1	2	3	4	5
y	0	2/5	2/10	2/15	2/20	2/25

2/5(0)-2 = 2/0
2/5(1)-2 = 2/5
2/5(2)-2 = 2/10
2/5(3)-2 = 2/15
2/5(4)-2 = 2/20
2/5(5)-2 = 2/25



$y = \sqrt{2x-1}$

D(-1/2,∞)

R(0,∞)

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
y	1i	1	1.7	2.2	2.6	3

$\sqrt{2(0)-1} = \sqrt{-1} = 1i$

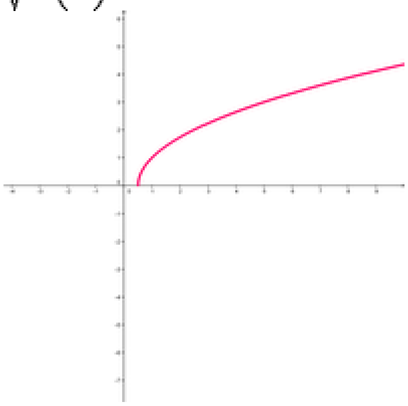
$\sqrt{2(1)-1} = \sqrt{1} = 1$

$\sqrt{2(2)-1} = \sqrt{3} = 1.7$

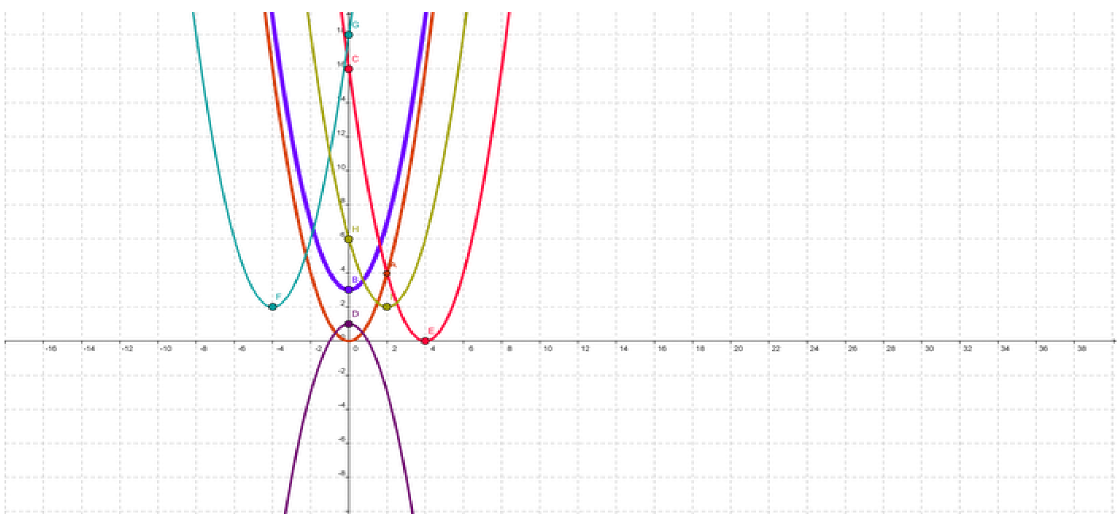
$\sqrt{2(3)-1} = \sqrt{5} = 2.2$

$\sqrt{2(4)-1} = \sqrt{7} = 2.6$

$\sqrt{2(5)-1} = \sqrt{9} = 3$



2.4 Funciones algebraicas: función polinomial, racional e irracional.



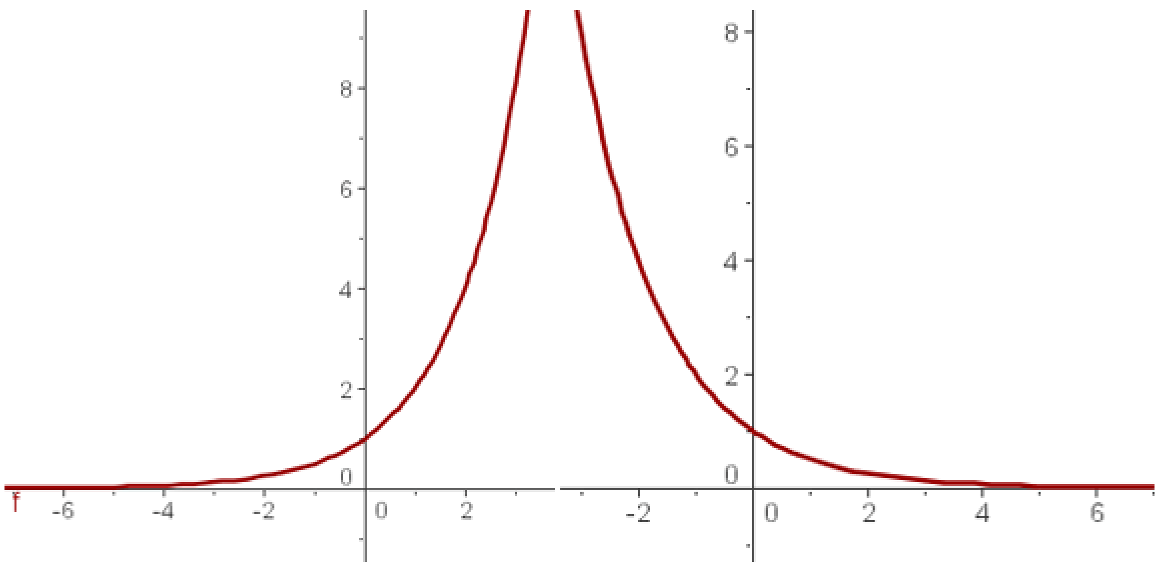
2.5 Funciones trascendentes: funciones trigonométricas y funciones exponenciales.

En las funciones trascendentes la variable independiente figura como exponente, o como índice de la raíz, o se halla afectada del signo logaritmo o de cualquiera de los signos que emplea la trigonometría.

Función exponencial

$$f(x) = a^x$$

Sea a un número real positivo. La función que a cada número real x le hace corresponder la potencia a^x se llama *función exponencial de base a y exponente x*.

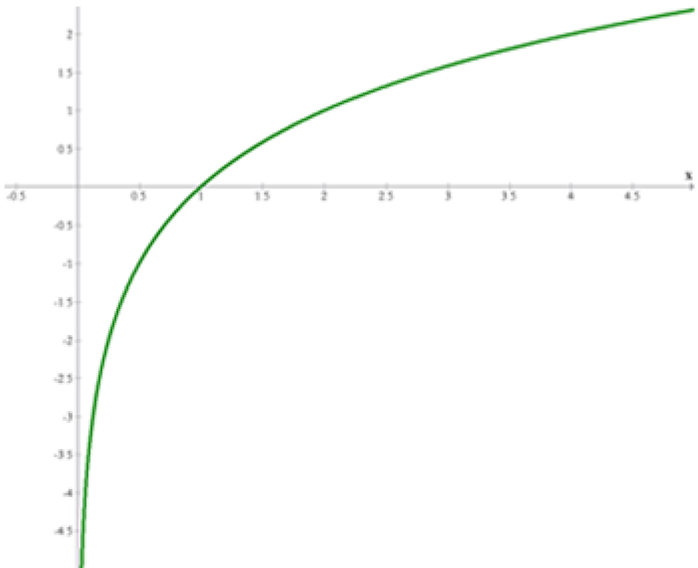


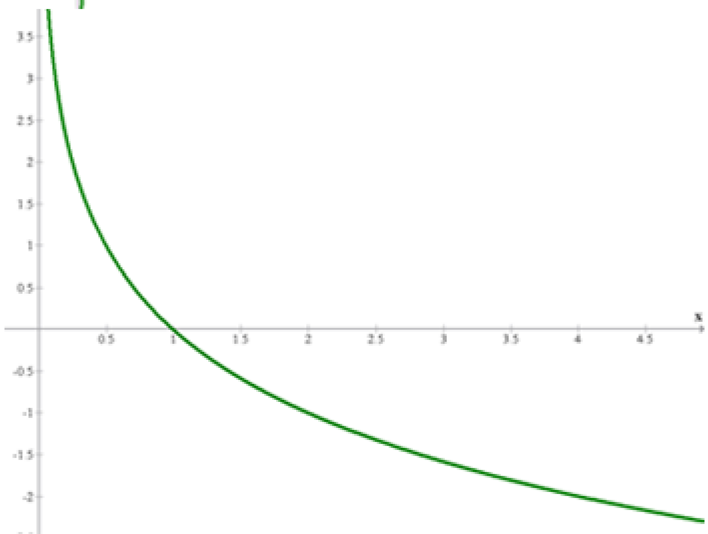
Funciones logarítmicas

La función logarítmica en base a es la función inversa de la exponencial en base a.

$$f(x) = \log_a x$$

$$a > 0, \quad a \neq 1$$



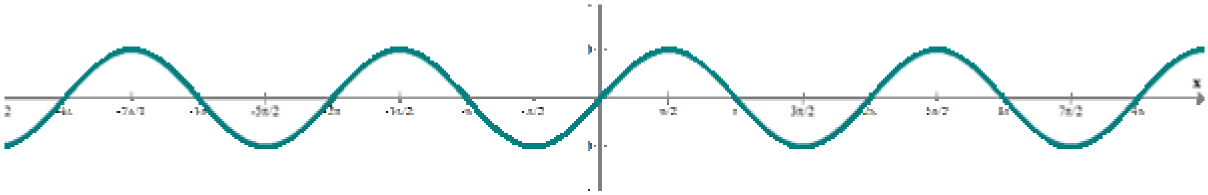


Funciones trigonométricas

La **funciones trigonométricas** asocian a cada número real, x, el valor de la razón trigonométrica del ángulo cuya medida en radianes es x.

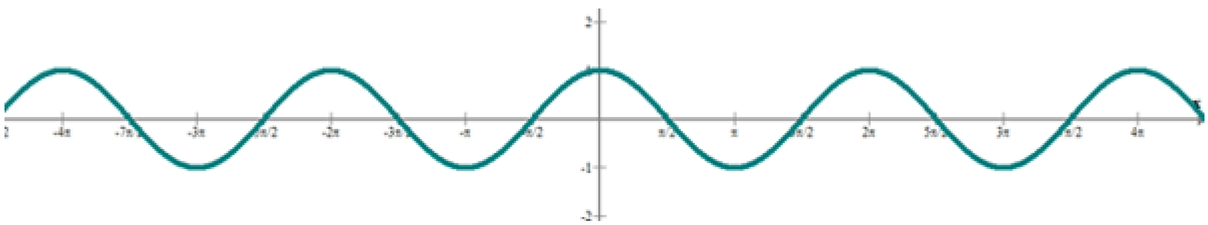
Función seno

f(x) = sen x



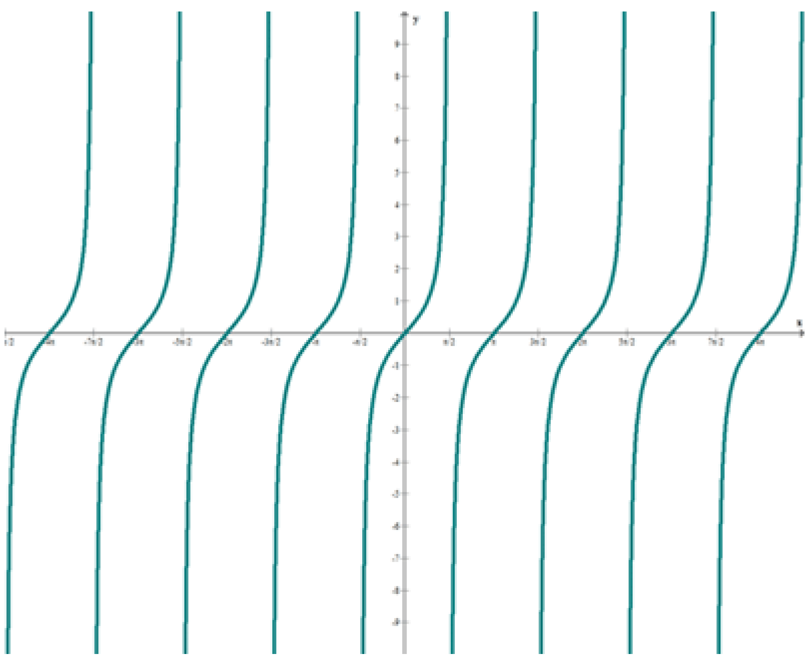
Función coseno

f(x) = cosen x



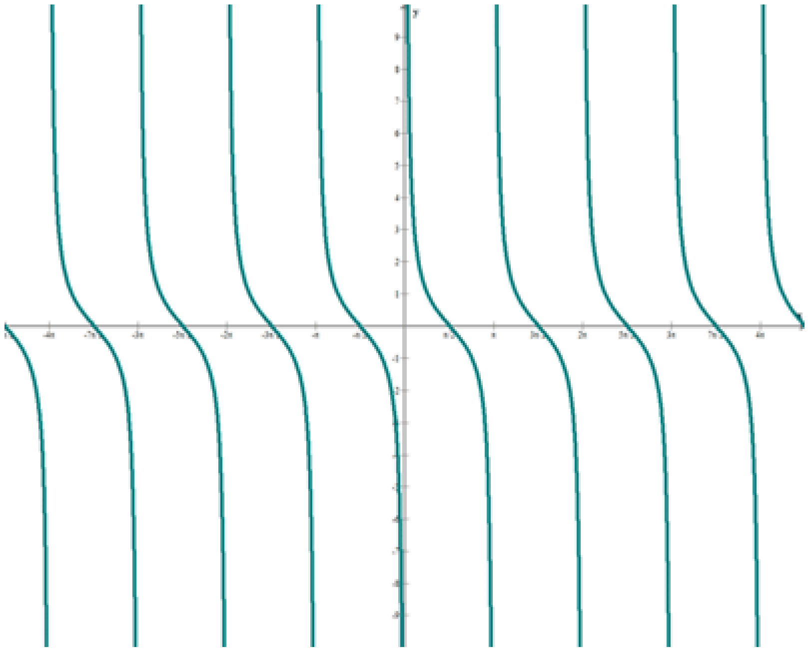
Función tangente

f(x) = tg x



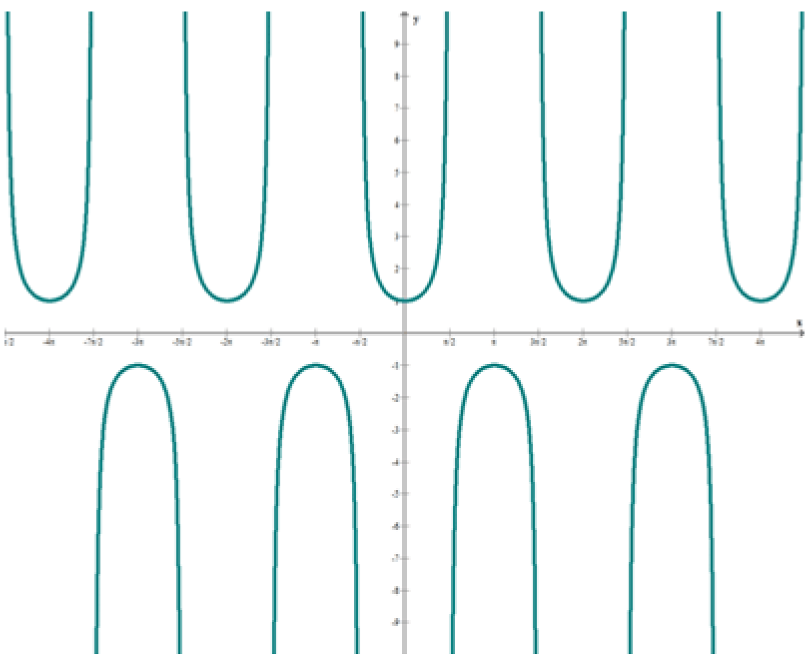
Función cosecante

f(x) = cosec x



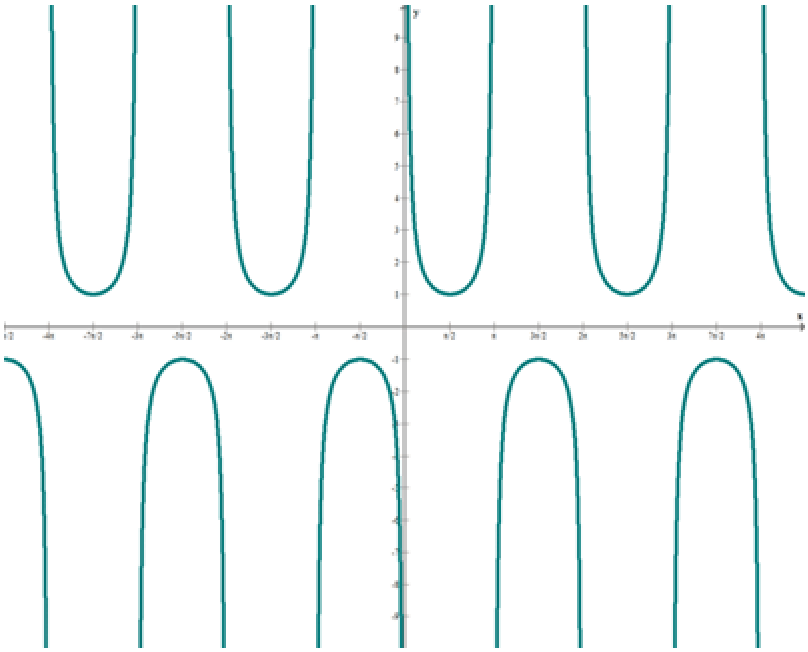
Función secante

f(x) = sec x



Función cotangente

f(x) = cotg x



2.6 Función definida por más de una regla de correspondencia. función valor absoluto.

La función de valor absoluto tiene por ecuación f(x) = |x|, y siempre representa distancias; por lo tanto, siempre será positiva o nula.
En esta condición, de ser siempre positiva o nula, su gráfica no se encontrará jamás debajo del eje x. Su gráfica va a estar siempre por encima de dicho eje o, a lo sumo, tocándolo.
Las funciones en valor absoluto siempre representan una distancia o intervalos (tramos o trozos) y se pueden resolver o calcular siguiendo los siguientes pasos:
1. Se iguala a cero la función, sin el valor absoluto, y se calculan sus raíces (los valores de x).
2. Se forman intervalos con las raíces (los valores de x) y se evalúa el signo de cada intervalo.
3. Definimos la función a intervalos, teniendo en cuenta que en los intervalos donde la x es negativa se cambia el signo de la función.
4. Representamos la función resultante.

2.7 Operaciones con funciones: adición, multiplicación, composición.

Notación para Operaciones con Funciones

Operación	Notación
Suma	$f + g \quad x = f \quad x + g \quad x$
Resta	$f - g \quad x = f \quad x - g \quad x$
Multiplicación	$fg \quad x = f \quad x \cdot g \quad x$
División	$\left(\frac{f}{g}\right) \quad x = \frac{f \quad x}{g \quad x}$, donde $g \quad x \neq 0$

Las funciones se pueden utilizar de la misma manera que los números: sumar, restar, multiplicar, dividir, elevar a una potencia, sacar raíz o se puede hacer combinaciones.

Composicion De Funciones

Dos funciones se combinan para producir un resultado. Por ejemplo: f actua sobre “x” para producir f(x) y luego g actua sobre f(x) o tambien llamada funcion composicion que se representa g(f(x))

Definición.

Sean f, g dos funciones reales de variable real. Entonces se pueden definir las siguientes operaciones: i. SUMA: ii. DIFERENCIA: iii. PRODUCTO: iv. COCIENTE

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES:

Bajo ciertas condiciones es posible definir a partir de dos funciones f y g, una nueva función llamada la “compuesta de f y g”.

Sean y dos funciones donde coincide el dominio de la segunda con el codominio de la primera

2.8 Función inversa. Función logarítmica. Funciones trigonométricas inversas.

Funciones Inversas, Funciones Logarítmicas, Funciones Trigonométricas Inversas

Cualquier función que deshaga una función es llamada función inversa en matemáticas.

A la luz de la declaración anterior se puede concluir que para la función f: X → Y si utilizamos una entrada x para producir y como salida.

La función inversa g: Y → X produciría a x como salida mientras que y sería la cantidad de entrada.

Una función invertible es aquella que tiene una función inversa propia.

El inverso de tal función f es denotado por f^{-1} y es determinado de forma única.

Para una función dada f: X → Y, su inverso se representa como, $f\left(f^{-1}(x)\right) = f^{-1}(f(x)) \equiv x.$

Aquí se puede decir que tanto f(x) como f^{-1} (x) son reflejos una de la otra sobre la recta x=y.

Cada función que posee una inversa debe satisfacer la condición que establece que para cada elemento en el dominio de la función existe un único elemento para el cual ningún otro elemento en el dominio de la función puede corresponder.

Por tanto es posible decir que cada elemento en el rango y en el dominio de la función está apareado en una asociación única.

Cada elemento del rango de la función está asociado con un único elemento del dominio de la función y cada elemento del dominio de la función está asociado con un único elemento del rango de la función.

Encontrar la inversa de una función es muy sencillo. Tomemos como ejemplo, f(x) = 2x + 3

Convierta la ecuación anterior a la forma de variable de x e y.

y = 2x + 3

y – 3 = 2x

y – 3/ 2 = x

Para encontrar el inverso de la ecuación anterior, simplemente intercambie las variables x e y en sus respectivos lugares,

x – 3/ 2 = y sería la inversa de la función de entrada.

Una función logarítmica f: X → y es una función de la forma, $y = log_{10} x$

Aquí b es usualmente un número real mayor que uno. Sin embargo solo necesita ser mayor de cero, y nunca debe ser igual a uno.

Tal función es definida para todos los valores de x mayores que cero.

Las funciones logarítmicas se abrevian como funciones log y estas funciones son las funciones inversas de las funciones exponenciales.

Tales funciones generalmente poseen una asíntota vertical en vez de una horizontal por el motivo de ser las inversas de la función exponencial.

También siendo las funciones inversas de las funciones exponenciales, su dominio es limitado.

Las funciones logarítmicas fueron introducidas más tarde debido a que se enfrentaron a problemas para encontrar las funciones inversas de las funciones exponenciales.

Observe el ejemplo siguiente,

x = 10^y, para encontrar la inversa reemplace x e y para obtener,

y = 10^x

Como podemos observar no es posible resolver la ecuación anterior, entonces es ahí donde entra el uso de las funciones logarítmicas.

Por tanto la ecuación se convertirá en, $y = log_{10} x$

La cual puede ser resuelta utilizando la tabla log.

Las funciones inversas de las funciones trigonométricas se llaman funciones trigonométricas inversas o funciones ciclométricas.

Estas son el general funciones con múltiples valores.

La afirmación anterior puede entenderse mejor con la ayuda de un ejemplo.

Supongamos que z tiene muchos valores.

Ahora la ecuación, **Z=sen W**

Por lo que no puede existir un valor único de la inversa de esta ecuación hasta que tengamos un valor principal definido para w.

Estas funciones no satisfacen la definición de función inversa, ya que su rango es subconjunto del dominio de las funciones trigonométricas.

Las funciones trigonométricas inversas se enumeran a continuación junto con sus notaciones alternativas.

1. $\sin^{-1}$ z arcsin z

2. $\cos^{-1}$ z arcos z

3. $\tan^{-1}$ z acrtan z

4. $\sec^{-1}$ z arcsec z

5. cosec^{-1} z acrcosec z

6. $\cot^{-1}$ z arccot z

2.9 Funciones con dominio en los números naturales y recorrido en los números reales: las sucesiones infinitas.

Una sucesión numérica es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y cuyo recorrido está incluido en el conjunto de los números reales.

En símbolos:

s: IN ® IR / " n Î IN: s(n) = a_n

Es decir que:
- a_1 es la imagen del número natural 1 por medio de la sucesión
  1 ® s(1) = a_1
- a_2 es la imagen del número natural 2 por medio de la sucesión
  2 ® s(2) = a_2
  3 ® s(3) = a_3

De acuerdo con esta definición, cada elemento de una sucesión puede representarse como un par ordenado (n, s(n)) o bien (n, a_n). Por consiguiente, toda sucesión puede representarse gráficamente mediante un diagrama cartesiano.

2.10 Función implícita.

Una función y (x) se llama implícita cuando está definida de la forma F (x, y) = 0 en lugar de la habitual.

Por ejemplo, puede probarse que la siguiente ecuación define una función implícita en cierta región de $\mathbb{R}^2$ entre las variables *x* e *y*:

$$y^3 + y^2 + 5xy + x^2 + x + y = 0$$

Diferenciación

Para poder derivar una función implícita se usa la Regla de la cadena, en el caso de la variable independiente no hay problema ya que se deriva directamente, para la variable dependiente se considera como una función que a su vez esta en función de la variable independiente:

Dada una función F(X,Y), implícita, si queremos calcular la derivada de **y** respecto de **x**: .

dy/dx=f´(X)

Si consideramos Y = F(x) es una función en términos de la variable independiente **x** y G(y) es una función en términos de la variable dependiente **y**, dado que Y= f(x) , entonces para obtener la derivada:

$$D_x(G(y)) = D_x(G(f(x))) = G'(x)(f'(x))$$